

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Rješenja prvog ispita - 20. lipnja 2025.

Zadatak 1. U trokutu ABC , neka je D točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je AD simetrala kuta $\angle BAC$. Pravac kroz vrh C koji je paralelan sa AD siječe pravac AB u točki E .

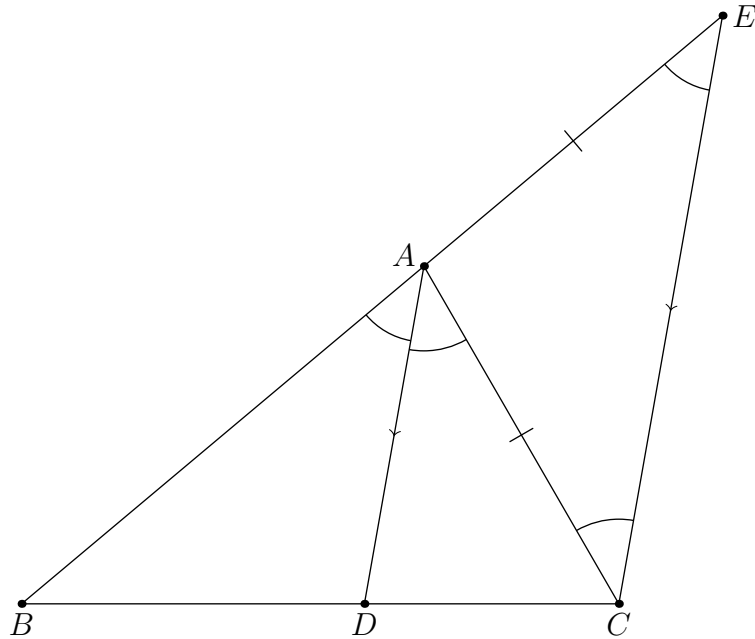
- (a) Dokažite da je $\triangle ACE$ jednakokračan trokut.
- (b) Koristeći $AD \parallel CE$ i prikladne slične trokute, dokažite *Teorem o simetrali kuta* koji tvrdi:

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|CA|}.$$

- (c) Neka je I središte upisane kružnice u $\triangle ABC$. Dokažite

$$\frac{|AI|}{|ID|} = \frac{|CA| + |AB|}{|BC|}.$$

Rješenje. (a) Po definiciji pravci AD i CE su paralelni. Iskoristimo prvo da je AE njihova presječnica, pa dobijemo $\angle CEA = \angle DAB = \alpha/2$.



Slično AC je također presječnica i imamo $\angle ACE = \angle CAD = \alpha/2$, gdje je $\alpha := \angle CAB$. To znači da u $\triangle ACE$ imamo $\angle ACE = \angle CEA$, dakle trokut je jednakokračan i vrijedi $|AE| = |AC|$.

- (b) Uočimo da su $\triangle BDA \sim \triangle BCE$, to vidimo npr. iz KK poučka o sličnosti (zbog $AB \parallel CE$ vrijedi $\angle BDA = \angle BCE, \angle DAB = \angle CEB$). Tada je

$$\frac{|BC|}{|BD|} = \frac{|BE|}{|BA|} \implies \frac{|BD| + |DC|}{|BD|} = \frac{|BA| + |AE|}{|BA|} \quad (1)$$

$$\implies 1 + \frac{|DC|}{|BD|} = 1 + \frac{|CA|}{|BA|} \quad (2)$$

$$\implies \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|CA|}. \quad (3)$$

U (2) smo koristili $|AE| = |CA|$ što nam je poznato iz (a) dijela.

- (c) Uočimo da je u $\triangle BDA$, točka I sjecište simetrale kuta $\angle ABD$ i stranice $\overline{DA}$. To znači da možemo primijeniti *Teorem o simetrali kuta* u trokutu $\triangle BDA$ što nam daje

$$\frac{|AI|}{|ID|} = \frac{|AB|}{|BD|}. \quad (4)$$

Znamo da vrijedi $|BD|/|DC| = |AB|/|CA|$, ideja je iskoristiti taj omjer da izrazimo $|BD|$ preko duljina stranica od $\triangle ABC$. Imamo

$$\begin{aligned} \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|CA|} &\implies \frac{|DC|}{|BD|} = \frac{|CA|}{|AB|} \implies \frac{|DC|}{|BD|} + 1 = \frac{|CA|}{|AB|} + 1 \\ &\implies \frac{|BC|}{|BD|} = \frac{|CA| + |AB|}{|AB|} \implies |BD| = \frac{|BC||AB|}{|CA| + |AB|}. \end{aligned} \quad (5)$$

Kad taj izraz za $|BD|$ uvrstimo u (4), dobijemo

$$\frac{|AI|}{|ID|} = \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AB|}{\frac{|BC||AB|}{|CA| + |AB|}} = \frac{|CA| + |AB|}{|BC|},$$

a to je upravo ono što je trebalo dokazati.

□

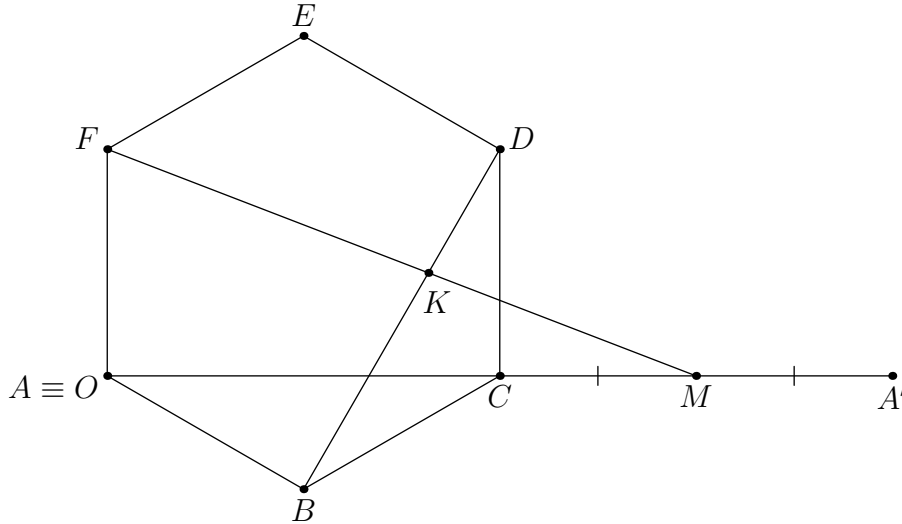
Zadatak 2. Dan je pravilni šesterokut $ABCDEF$. Neka je A' točka centralnosimetrična točki A u odnosu na vrh C , a M polovište dužine $\overline{CA'}$. Ako je K sjecište pravaca FM i BD , odredite omjer $|BK| : |KD|$.

Prvo rješenje.

Omjer određujemo koristeći radijvektore sa središtem u vrhu A . Označimo sljedeće bazne vektore:

$$\vec{x} := \overrightarrow{AC}, \quad \text{ i } \quad \vec{y} := \overrightarrow{AF}.$$

Pored toga što su vektori $\vec{x}$ i $\vec{y}$ linearno nezavisni, oni su i međusobno okomiti.



Izrazimo sve radijvektore preko baznih:

$$\overrightarrow{AB} = \frac{\vec{x}}{2} - \frac{\vec{y}}{2}, \quad \overrightarrow{AM} = \frac{3\vec{x}}{2}, \quad \overrightarrow{AD} = \vec{x} + \vec{y}, \quad \overrightarrow{AE} = \frac{\vec{x}}{2} + \frac{3\vec{y}}{2}.$$

Posebno nas zanimaju $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{FM}$:

$$\overrightarrow{BD} = (\vec{x} + \vec{y}) - \left(\frac{\vec{x}}{2} - \frac{\vec{y}}{2} \right) = \frac{\vec{x}}{2} + \frac{3\vec{y}}{2}, \quad \overrightarrow{FM} = \frac{3\vec{x}}{2} - \vec{y}$$

Kako je K sjecište pravaca BD i FM to postoje realni brojevi $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, takvi da je

$$\overrightarrow{BK} = \lambda \cdot \overrightarrow{BD}, \quad \text{ i } \quad \overrightarrow{FK} = \mu \cdot \overrightarrow{FM}.$$

Iz jednakosti $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FK}$ dobivamo sljedeću jednadžbu:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{x}}{2} - \frac{\vec{y}}{2} + \lambda \cdot \left(\frac{\vec{x}}{2} + \frac{3\vec{y}}{2} \right) &= \vec{y} + \mu \cdot \left(\frac{3\vec{x}}{2} - \vec{y} \right) \\ \iff \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} \right) \cdot \vec{x} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3\lambda}{2} \right) \cdot \vec{y} &= \left(\frac{3\mu}{2} \right) \cdot \vec{x} + (1 - \mu) \cdot \vec{y}. \end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz bazne vektore $\vec{x}$ i $\vec{y}$ dobivamo sustav:

$$\begin{cases} \lambda + 1 &= 3\mu, \\ 3\lambda - 1 &= -2\mu + 2. \end{cases}$$

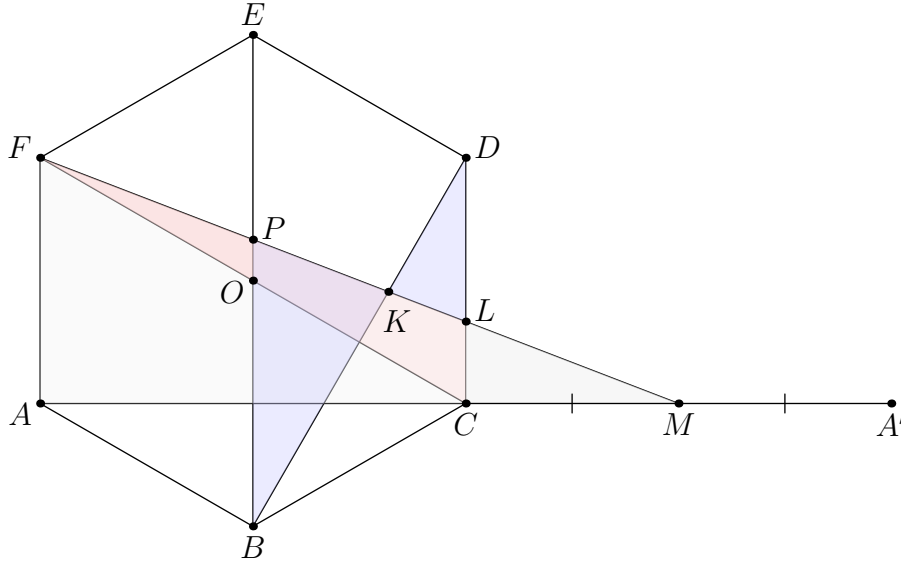
Rješavanjem sustava dobivamo da je $\lambda = \frac{7}{11}$, odakle je $|BK| : |KD| = \frac{\lambda}{1 - \lambda} = \frac{7}{4}$. □

Drugo rješenje.

Ideja iza drugog rješenja je nizom sličnosti doći do traženog omjera. Prvu sličnost dobivamo uočavanjem da je glavna dijagonala BE paralelna sa stranicom CD . Ako definiramo točke P i L kao presjeke pravca FM sa BE i CD redom tada imamo prvu sličnost trokuta:

$$\triangle BKP \sim \triangle DKL \implies \frac{|BK|}{|KD|} = \frac{|BP|}{|LD|}. \quad (6)$$

Kako bismo odredili traženi omjer potrebno je odrediti $|BP|$ i $|LD|$.



Označimo sa O središte šesterokuta i sa a duljinu stranice šesterokuta.

Kako su FA i LC paralelni imamo

$$\triangle FAM \sim \triangle LCM \implies \frac{|FA|}{|AM|} = \frac{|LC|}{|CM|} \implies |LC| = \frac{|CM|}{|AM|} \cdot |FA| = \frac{a}{3}. \quad (7)$$

Dakle $|LD| = |CD| - |LC| = \frac{2a}{3}$, odredimo sada $|PB|$. Uočimo da O kao središte leži na glavnoj dijagonali BE . Lako vidimo da se P nalazi između O i E . Stoga je $|BP| = |BO| + |OP|$. Sada koristeći paralelnost OP sa LC imamo sličnost:

$$\triangle FOP \sim \triangle FCL \implies \frac{|OP|}{|FO|} = \frac{|LC|}{|FC|} \implies |OP| = \frac{|FO|}{|FC|} \cdot |LC| = \frac{a}{6} \quad (8)$$

No tada je $|BP| = |BO| + |OP| = a + \frac{a}{6} = \frac{7a}{6}$. Konačno uvrštavajući u jednadžbu (6) dobivamo omjer koji smo tražili:

$$\frac{|BK|}{|KD|} = \frac{|BP|}{|LD|} = \frac{\frac{7a}{6}}{\frac{2a}{3}} = \frac{7}{4}.$$

□

Zadatak 3. Odredite sve realne brojeve λ takve da je pravac

$$p \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y-2\lambda}{3} = \frac{z+\lambda}{\lambda}$$

paralelan s ravninom $\pi \dots 5x - 2y + (\lambda - 4)z = 7$. Potom odredite jednadžbu ravnine koja sadrži pravac p i paralelna je s π .

Rješenje. Uočimo da je $\vec{n}_\pi = [5, -2, \lambda - 4]$ jedna normala na ravninu π , a $\vec{s}_p = [2, 3, \lambda]$ je vektor smjera za pravac p . Tada imamo da je $p \parallel \pi \iff \vec{s}_p \perp \vec{n}_\pi \iff \vec{s}_p \cdot \vec{n}_\pi = 0$. Vrijedi $\vec{s}_p \cdot \vec{n}_\pi = 10 - 6 + \lambda(\lambda - 4) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$. Iz $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, odnosno $(\lambda - 2)^2 = 0$, zaključujemo

$$\boxed{\lambda = 2}$$

Sada iz jednadžbe pravca uočimo da je $T := (1, 2\lambda, -\lambda) = (1, 4, -2)$ točka na p . Kada je $\lambda = 2$, normala ravnine π je $\vec{n}_\pi = [5, -2, -2]$. Π je tada ravnina kojoj je $\vec{n}_\pi$ normala i koja sadrži točku T , pa joj je jednadžba

$$\begin{aligned} 5(x-1) - 2(y-4) - 2(z-(-2)) &= 0 \\ \iff 5x - 2y - 2z &= 1. \end{aligned}$$

□

Zadatak 4. Neka je F fokus parabole, T tjeme parabole i P proizvoljna točka na paraboli, ako se tangente na parabolu u T i P sijeku u točki Q dokažite da je $\angle PQF = 90^\circ$.

Prvo rješenje.

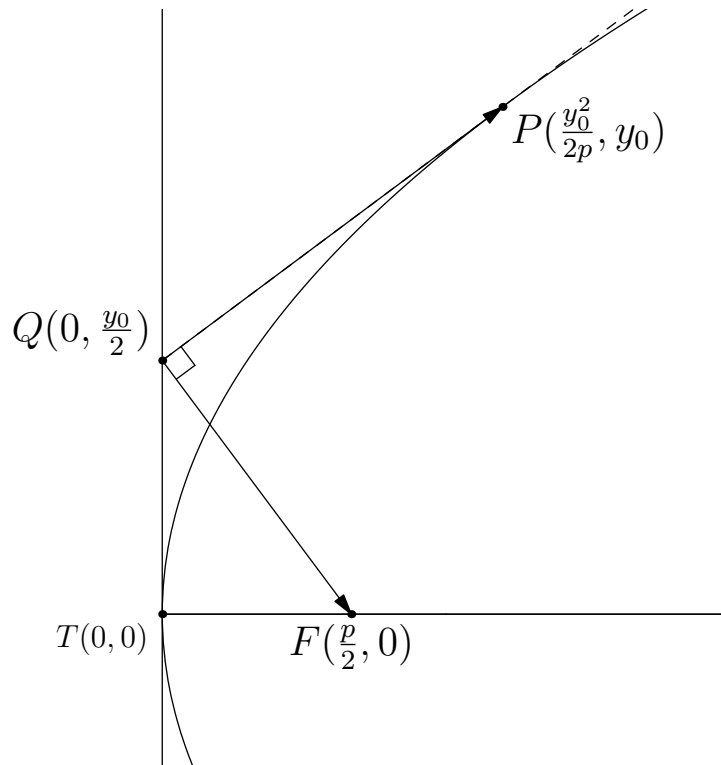
Afinom transformacijom koja je kompozicija translacije i rotacije parabolu možemo svesti u oblik $y^2 = 2px$ za neki $p \in \mathbb{R}$.

Neka je $P = (x_0, y_0)$, kako P leži na paraboli tada koordinate točke P zadovoljavaju jednadžbu

$$y_0^2 = 2px_0 \implies x_0 = \frac{y_0^2}{2p} \implies P = \left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0 \right).$$

Jednadžba tangente u točki P je dana s

$$yy_0 = p \cdot (x + x_0). \quad (9)$$



Kako je tjeme parabole $y^2 = 2px$ zapravo ishodište $T = (0, 0)$ to je tangenta u tjemenu zapravo y -os, to jest jednadžba tangente u tjemenu je upravo $x = 0$. Dakle točka Q ima koordinatne $(0, y_Q)$. Kako je točka Q presjek tangente u tjemenu i tangente u P ona zadovoljava jednadžbu (9), to jest

$$y_Q y_0 = p \cdot (0 + x_0) \implies y_Q = \frac{px_0}{y_0} = \frac{p \cdot \frac{y_0^2}{2p}}{y_0} = \frac{y_0}{2} \implies Q = \left(0, \frac{y_0}{2} \right).$$

Koordinate fokusa parabole $y^2 = 2px$ su dane s $F = (\frac{p}{2}, 0)$.

Kut $\angle FQP$ će biti pravi kut ako i samo ako je skalarni produkt vektora $\overrightarrow{QP}$ i $\overrightarrow{QF}$ nula.

$$\angle FQP = 90^\circ \iff \overrightarrow{QF} \cdot \overrightarrow{QP} = 0.$$

Stoga računamo:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QF} &= \left(\frac{p}{2}, -\frac{y_0}{2}\right), \\ \overrightarrow{QP} &= \left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0 - \frac{y_0}{2}\right) = \left(\frac{y_0^2}{2p}, \frac{y_0}{2}\right), \\ \overrightarrow{QF} \cdot \overrightarrow{QP} &= \frac{y_0^2}{2p} \cdot \frac{p}{2} - \frac{y_0^2}{4} = 0.\end{aligned}$$

Dakle pravci QF i QP su zaista okomiti, to jest $\angle FQP = 90^\circ$. □

Napomena: Alternativni način za dovršiti zadatak računski je pokazat da vrijedi

$$|PF|^2 = |PQ|^2 + |QF|^2,$$

te koristeći obrat *Pitagorinog teorema* dokazati da je $\angle FQP = 90^\circ$.

Drugo rješenje.

Neka je N nožište okomice iz P na direktrisu, po geometrijskoj karakterizaciji parabole vrijedi

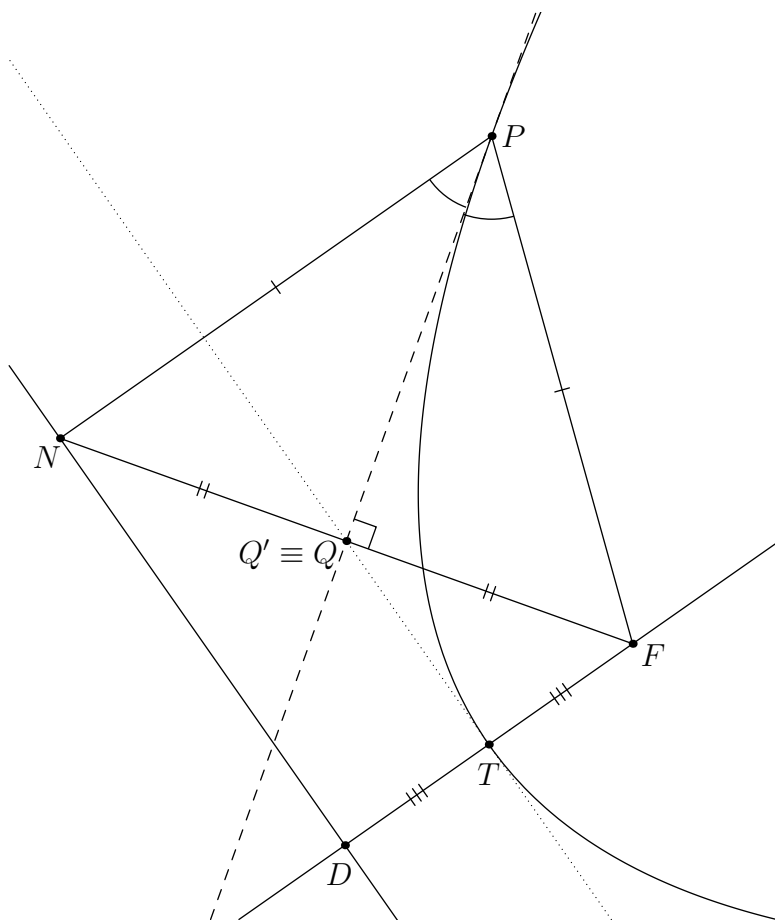
$$|PN| = |PF|. \quad (10)$$

Neka je t tangenta na parabolu u tjemenu T i neka je p tangenta na parabolu u točki P .

Tada je po optičkom svojstvu parabole, p simetrala kuta $\angle FPN$. Kako je po (10) trokut $\triangle FPN$ jednakokračan to je p i simetrala osnovice $\overline{FN}$.

Točka Q nam je definirana kao presjek tangenti p i t , kada bismo dokazali da Q leži na pravcu $\overline{FN}$ vrijedilo bi da je Q polovište dužine $\overline{FN}$. Odakle iz činjenice da je p simetrala dužine $\overline{FN}$ slijedi da je $\angle FQP = 90^\circ$.

Biramo jednostavniju varijantu problema za dokazati. Definiramo točku Q' kao presjek pravca TN i tangente t , te dokazujemo da Q leži na p , to jest da je $Q \equiv Q'$.



Označimo sa D točku na direktrisi koja leži na optičkoj osi (na pravcu FT). Kako je tjeme T na paraboli imamo jednakost $|TF| = |TD|$, a budući da je tjeme T na optičkoj osi ono je i polovište segmenta $\overline{FD}$.

Tangenta t u tjemenu je paralelna sa direktrisom to jest

$$TQ' \parallel DN.$$

Kako je T polovište to je TQ' srednjica trokuta $\triangle FDN$, odakle vidimo da je Q' polovište segmenta $\overline{FN}$. Ovime smo dokazali da je $Q' \equiv Q$ jer se Q' nalazi na tangenti p koju smo karakterizirali kao simetralu stranice $\overline{FN}$. $\square$

Zadatak 5. Dana je krivulja

$$C : x^2 + 2y^2 + xy - x - y = 6.$$

- (a) Je li C elipsa, hiperbola ili parabola? Obrazložite.
(b) Odredite neku racionalnu parametrizaciju od C .

Rješenje. (a) Svest ćemo jednadžbu na kanonski oblik koristeći affine transformacije. Prvo ćemo se riješiti mješovitog člana xy upotpunjavanjem do kvadrata.

$$\begin{aligned} x^2 + xy + 2y^2 - x - y &= 6 \\ \implies \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} + 2y^2 - x - y &= 6 \\ \implies \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}y^2 - x - y &= 6 \end{aligned}$$

Uvodimo prvu supstituciju $x_1 = x + \frac{y}{2}$, $y_1 = y$. Tada je $x = x_1 - \frac{y_1}{2}$. Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo:

$$\begin{aligned} x_1^2 + \frac{7}{4}y_1^2 - \left(x_1 - \frac{y_1}{2}\right) - y_1 &= 6 \\ \implies x_1^2 - x_1 + \frac{7}{4}y_1^2 - \frac{1}{2}y_1 &= 6 \end{aligned}$$

Sada upotpunjujemo na potpune kvadrate po varijablama x_1 i y_1 :

$$\begin{aligned} \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{7}{4}\left(y_1^2 - \frac{2}{7}y_1\right) &= 6 \\ \implies \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\left(y_1 - \frac{1}{7}\right)^2 &= \frac{44}{7}. \end{aligned}$$

Uvođenjem novih koordinata $x_2 = x_1 - \frac{1}{2}$ i $y_2 = y_1 - \frac{1}{7}$, dobivamo kanonski oblik:

$$\boxed{x_2^2 + \frac{7}{4}y_2^2 = \frac{44}{7}}.$$

Kako su koeficijenti uz x_2^2 i y_2^2 oba pozitivna, zaključujemo da je krivulja C **elipsa**.

- (b) Da bismo našli racionalnu parametrizaciju, prvo moramo pronaći jednu racionalnu točku na krivulji. Uočimo da se $P = (0, 2)$ nalazi na krivulji (općenito je ideja uvrštavati male brojeve dok ne nađemo točku koja zadovoljava jednadžbu).

Sada povlačimo pravce kroz točku P s racionalnim koeficijentom smjera t . Jednadžba takvog pravca je $y = tx + 2$. Uvrstimo to u jednadžbu krivulje C :

$$x^2 + 2(tx + 2)^2 + x(tx + 2) - x - (tx + 2) = 6.$$

Sređivanjem izraza dobivamo:

$$\begin{aligned} x^2 + 2(t^2x^2 + 4tx + 4) + tx^2 + 2x - x - tx - 2 - 6 &= 0 \\ \iff (2t^2 + t + 1)x^2 + (7t + 1)x &= 0. \end{aligned}$$

Jedno rješenje kvadratne jednadžbe u x je $x_1 = 0$, što odgovara našoj početnoj točki $P = (0, 2)$. Drugo rješenje je

$$x_2 = -\frac{7t + 1}{2t^2 + t + 1}.$$

Pripadna y -koordinata je

$$y_2 = tx_2 + 2 = \frac{-3t^2 + t + 2}{2t^2 + t + 1}.$$

Dakle, tražena racionalna parametrizacija krivulje C je dana s

$$Q(t) = \left(-\frac{7t + 1}{2t^2 + t + 1}, \frac{-3t^2 + t + 2}{2t^2 + t + 1} \right). \quad \square$$

$\square$